研究会報告

35. フラクタルポテンシャル上の異常拡散

早川尚男，山本稔*，高安秀樹**

九大理，*東洋情報サービス，**Yale University

異常拡散はfaractral上のrandom walkに付随して生ずる。特にpercolation cluster上のrandom walkの問題は，Orbachらのfractonの提唱以来，広い関心を集めてる。またpercolation上の問題と近い性質を持っている事から数学的ﾓﾃﾞﾙとして解析し易いSierpinski gasket(SG)上のrandom walkは良く調べられている。これらは何れもfractral的に良導性の物質が分布し，残りの部分はinsulatorであるという描像に基ずく。

今回，我々は従来の描像を拡張し，insulatorの部分にも有限の伝導度を与えた系でのrandom walkの長時間の振舞いを数値的にしらべた。Simulationは，SG上をpotential $\phi=0$ として，残りの部分に階層的な，三角ｽｲを置き，その高さに比例したpotentialの値を与えた系でおこなった（図１）。Walkerのhopping probabilityは，次の様に定めた。

$$W(r \to r') = \begin{cases} \frac{1}{6} \exp\left\{-\frac{\phi(r')-\phi(r)}{T}\right\} & \text{for} \quad \phi(r') > \phi(r) \\ \frac{1}{6} & \text{for} \quad \phi(r') \leqq \phi(r) \end{cases}$$

ここで6は三角格子での配位数，T は温度をあらわす。仮にT=0とすると，零でないpotentialの領域には，walkerは侵入できず，SG上の問題に帰着する。またT=∞ではhopping probabilityは場所によらず，２次元上の問題と等価である。尚，(1)式では確率が保存しないので，停留確率を $1-\sum_{r'} W(r\to r')$ としている。

そもそも異常拡散とは次のように定義される。Walkerが進む平均二乗距離を時間tの関数と見て

$$\langle r^2(t) \rangle \sim t^{2\nu}$$

とあらわすときに，2ν が１と異なるときに異常拡散と云う。2ν の値は拡散係数の異常やvelocity autocorrelation function のlong time tailにつながる重要な量である。もう一つ，拡散過程を特徴付ける量はスペクトル次元(spectral dimension; fracton dimension)と呼ばれる指数である。Spectral dimensionは拡散過程では再帰確率，或は number of distinct sites visited(walker の通過した異なった格子点の数）に依

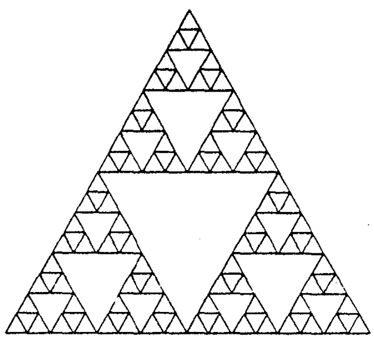
て定義される。ここでは number of distict sites visited S(t) を用いて

$$S(t) \simeq t^{\tilde{d}/2} \qquad \text{for} \quad \tilde{d} \leq 2$$

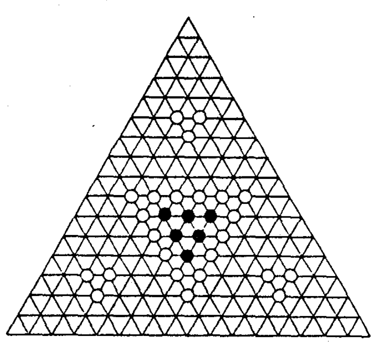
と表す。ここで $\tilde{d}$ がスペクトル次元である。一様な系ではスペクトル次元は空間次元と一致する。$\tilde{d}>2$ の場合には明らかにS(t)は時間に比例するが，今の場合は，二次元系を扱っているので $\tilde{d}$ は２を越えることはない。既にＴ＝０（ＳＧ）とＴ＝∞（二次元系）の場合の ν と $\tilde{d}$ はよく知られている。我々は有限の温度を持つ系での振舞いを調べた。

結果は以下の通りである。スペクトル次元は各温度で一義的に定まり，温度とともにＳＧでの値から二次元系での値まで連続的に増加する（図２）。また二次元系の特徴であるスペクトル次元の対数補正は有限温度では見られない。このことは幾何学的に二次元である系が統計的には非二次元的であることを意味し，興味深い。一方 ν は各温度で明確な定義は出来ず，Ｔ＝０での値に収束する傾向が見える（図３）。これはpotentialの斜面ではwalkerのdriftがあり，potential region でのwalkerの存在確率は有限時間後に零になることから理解できる。但しフラクタル的なpotential分布のために緩和時間が長く、実際に有限時間内にＴ＝０での値に落ち着くことはない。

以上のsimulationから解ることは，walkerが進む平均二乗距離とnumber of distict sites visited との違いである。どちらも拡散の広がりをあらわす統計量であるが，前者の方がより局所的と云える。従来、これらの差異は意識されなかったが，複雑なパターンを持つ系での拡散では我々の計算のように明確な違いが生じる。更に二次元系でありながら温度と共にスペクトル次元が連続的に変化することから，拡散過程は幾何学的な次元では特徴付けられず，存在確率を反映するような次元を導入する必要があることが判った。



(a)



(b)

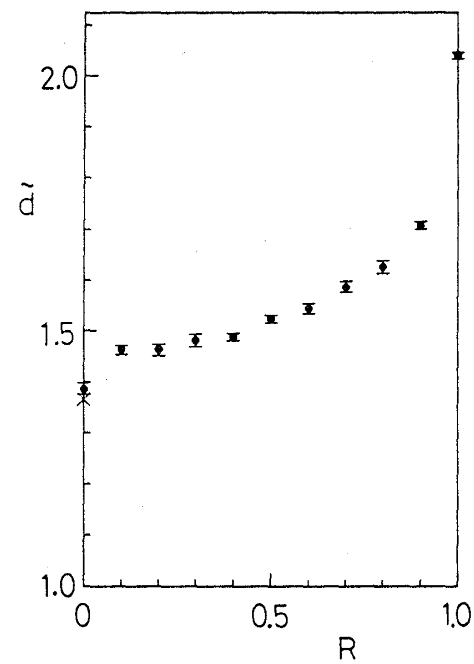


図2. スペクトル次元の温度変化。但しパラメータR は $R = e^{-\frac{1}{T}}$。 R=0(T=0)の×印はくりこみ群による $\tilde{d}_{SG} = \frac{2\log 3}{\log 5}$。

図1. Sierpinski gasket(a)と我々が simulation を行った系(b)。但し bで白丸は $\phi=1$，黒丸は $\phi=2$を表す。

図3(右)
指数νの収束性。上から順に $R=1.0(T=\infty)$, 0.9, 0.8, 0.6, 0.4, 0.2。 R=1を除きνの値は時間的に変化して $2\nu_{SG} = 2\log 2/\log 5$ に収束していく様子がわかる。